

Rappel : solution particulière, coeffs indéter.

$$p(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \dots + \xi_n x^n \quad (\xi_i \in \mathbb{R}, c \neq 0)$$

$$p(x) = \xi_0 \sin(\mu x) + \xi_1 x \cdot \sin(\mu x) + \dots + \xi_n x^n \sin(\mu x) + \eta_0 \cos(\mu x) + \eta_1 x \cdot \cos(\mu x) + \dots + \eta_n x^n \cos(\mu x) \quad \left( \xi_i, \eta_i, \mu \in \mathbb{R} \right. \\ \left. a(\mu)^2 + b\mu + c \neq 0 \right)$$

$$p(x) = \xi_0 e^{\lambda x} + \xi_1 x \cdot e^{\lambda x} + \dots + \xi_n x^n e^{\lambda x} \quad (\xi_i, \lambda \in \mathbb{R}, a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0)$$

$$p(x) = \xi_0 \sin(\mu x) e^{\lambda x} + \xi_1 x \cdot \sin(\mu x) e^{\lambda x} + \dots + \xi_n x^n \sin(\mu x) e^{\lambda x} + \eta_0 \cos(\mu x) e^{\lambda x} + \eta_1 x \cdot \cos(\mu x) e^{\lambda x} + \dots + \eta_n x^n \cos(\mu x) e^{\lambda x}$$

$$(\xi_i, \eta_i, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, a(\lambda + i\mu)^2 + b(\lambda + i\mu) + c \neq 0)$$

Si les  
hyp sont  
pas  
vérifiées  
y apparaît  
dans la  
comb.  
lin.

On cherche  $y_p$  de la même forme

Exemple 1.46 (ii)  $y'' - 2y' + 2y = e^x$

Étape 1: Polynôme caractéristique:  $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ .

$$\frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i \rightarrow y_1(x) = e^x \cos(x), y_2(x) = e^x \sin(x)$$

Étape 2: Coeffs indéter.  $q(x) = e^x \rightarrow$  ligne 2,

$\alpha_0 e^x$  ni  $y_1$ , ni  $y_2$  n'apparaît ✓

On cherche  $y_p$  de la forme  $y_p(x) = \alpha_0 e^x$ .

$$y_p'(x) = y_p''(x) = \alpha_0 e^x$$

$$\Rightarrow \text{on a besoin } e^x = y_p''(x) - 2y_p'(x) + 2y_p(x) = \alpha_0 e^x$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = 1. \Rightarrow y_p(x) = e^x \text{ est une solution particulière}$$

et la solution générale est  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dif. par  $y(x) = e^x + C_1 e^x \cos(x) + C_2 e^x \sin(x)$

Méthode 1.47 Polynôme caractéristique + coeff indéterminés,

cas où  $q$  ressemble à  $y_1$  ou  $y_2$ .)

Étape 1: polynôme caractéristique  $\rightarrow y_1 \neq y_2$  deux solutions lin. ind. de l'équation homogène.

Étape 2: Coeffs indéter.

Cas 1:  $b^2 - 4ac > 0$ ,  $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ ,  $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$   
 $a\lambda_i^2 + b\lambda_i + c = 0$ .

Supposons que  $q(x)$  a la forme ~~(ligne 2)~~ **ligne 3**

$$q(x) = \xi_0 e^{\lambda x} + \xi_1 x e^{\lambda x} + \dots + \xi_n x^n e^{\lambda x}, \quad \xi_i \in \mathbb{R}, \quad \lambda = \lambda_1 \text{ ou } \lambda_2$$

$$\rightarrow \cancel{\alpha_0 e^{\lambda x}} + \alpha_1 x e^{\lambda x} + \dots + \alpha_n x^n e^{\lambda x} + \alpha_{n+1} x^{n+1} e^{\lambda x}$$

**$= y_1 \text{ ou } y_2$**

Cas 2 :  $b^2 - 4ac = 0$ ,  $y_1 = e^{\lambda x}$ ,  $y_2 = x e^{\lambda x}$ ,  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

Supposons que  $\varphi(x)$  a la forme ~~(ligne 2)~~ ligne 3

$$\sum_0 e^{\lambda x} + \sum_1 x e^{\lambda x} + \dots + \sum_n x^n e^{\lambda x}, \quad \sum_i \in \mathbb{R}.$$

$$\rightarrow \cancel{\alpha_0 e^{\lambda x}} + \cancel{\alpha_1 x e^{\lambda x}} + \dots + \alpha_n x^n e^{\lambda x} + \alpha_{n+1} x^{n+1} e^{\lambda x} + \alpha_{n+2} x^{n+2} e^{\lambda x}$$

$y_1$                        $y_2$

$$\rightarrow y_p(x) = \alpha_2 x^2 e^{\lambda x} + \dots + \alpha_{n+2} x^{n+2} e^{\lambda x}$$

Cas "particulier",  $\varphi(x) = \sum_0 e^{\lambda x}$

$$\rightarrow \cancel{\alpha_0 e^{\lambda x}} + \cancel{\alpha_1 x e^{\lambda x}} + \alpha_2 x^2 e^{\lambda x}$$

$y_1$                        $y_2$

$\rightarrow y_p(x) = \alpha_2 x^2 e^{\lambda x}$

Cas 3:  $b^2 - 4ac < 0$ ,  $y_1(x) = e^{\lambda x} \sin(\mu x)$ ,  $y_2(x) = e^{\lambda x} \cos(\mu x)$

$$a(\lambda + i\mu)^2 + b(\lambda + i\mu) + c = 0.$$

Supposons que  $q(x)$  a la forme

$$q(x) = \sum_0 e^{\lambda x} \sin(\mu x) + \sum_1 x e^{\lambda x} \sin(\mu x) + \dots + \sum_n x^n e^{\lambda x} \sin(\mu x) \\ + \gamma_0 e^{\lambda x} \cos(\mu x) + \gamma_1 x e^{\lambda x} \cos(\mu x) + \dots + \gamma_n x^n e^{\lambda x} \cos(\mu x) \\ \sum_i, \gamma_i \in \mathbb{R}.$$

$$\rightarrow \alpha_0 \underbrace{e^{\lambda x} \sin(\mu x)}_{y_1} + \alpha_1 x e^{\lambda x} \sin(\mu x) + \dots + \alpha_n x^n e^{\lambda x} \sin(\mu x) + \alpha_{n+1} x^{n+1} e^{\lambda x} \sin(\mu x)$$

$$+ \beta_0 \underbrace{e^{\lambda x} \cos(\mu x)}_{y_2} + \beta_1 x e^{\lambda x} \cos(\mu x) + \dots + \beta_n x^n e^{\lambda x} \cos(\mu x) \\ + \beta_{n+1} x^{n+1} e^{\lambda x} \cos(\mu x)$$

### Exemple 1.69

Soit l'EDO  $y'' + y - 2y = xe^x$

Étape 1:  $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-2x}$$

Étape 2: coeffs indéterminés.  $\varphi(x) = xe^x$

$\rightarrow \cancel{\alpha_0 e^x} + \alpha_1 x e^x + \alpha_2 x^2 e^x$   
 $\quad \quad \quad y_1$

On cherche  $y_p$  de la forme  $y_p(x) = \alpha_1 x e^x + \alpha_2 x^2 e^x$

$$y_p'(x) = \alpha_1 e^x + \alpha_1 x e^x + 2\alpha_2 x e^x + \alpha_2 x^2 e^x = \alpha_1 e^x + (\alpha_1 + 2\alpha_2) x e^x + \alpha_2 x^2 e^x$$

$$y_p''(x) = (2\alpha_1 + 2\alpha_2) e^x + (\alpha_1 + 4\alpha_2) x e^x + \alpha_2 x^2 e^x$$

On a besoin

$$\begin{aligned}xe^x &= y_p''(x) + y_p'(x) - 2y_p(x) \\ &= (3\alpha_1 + 2\alpha_2)e^x + 6\alpha_2 x e^x\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 6\alpha_2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{6}, \alpha_1 = -\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{9}x e^x + \frac{1}{6}x^2 e^x, \text{ et la solution générale est}$$

$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$y(x) = -\frac{1}{9}x e^x + \frac{1}{6}x^2 e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Proposition 1.50 (Principe de superposition)

Soit l'EDO linéaire du 2<sup>e</sup> ordre à coefficients constants  
 $ay'' + by' + cy = q_1(x) + q_2(x)$

Si  $y_1$  est solution de  $ay_1'' + by_1' + cy_1 = q_1$  et  $y_2$  est solution de  $ay_2'' + by_2' + cy_2 = q_2$ , alors  $y = y_1 + y_2$  est solution de  $ay'' + by' + cy = q_1 + q_2$ .

Exemple 1.51 (i) soit l'EDO  $\frac{1}{2}y'' + 2y = x \sin(x) + \cos(2x)$

Étape 1: polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 + 2, \quad \lambda = \pm 2i$$

$$\rightarrow y_1(x) = e^{0 \cdot x} \sin(2x) = \sin(2x), \quad y_2(x) = e^{0 \cdot x} \cos(2x) = \cos(2x)$$

Étape 2: coeff redéfinir. on cherche  $y_{P,1}$  solution de

$$\frac{1}{2}y_{P,1}'' + 2y_{P,1} = x \sin(x) \quad \text{et} \quad y_{P,2} \text{ solution de}$$

$$\frac{1}{2} y_{p,2}'' + 2 y_{p,2} = \cos(2x)$$

$$\boxed{y_{p,1}} \quad q_1(x) = x \sin(x)$$

$$\alpha_0 \sin(x) + \alpha_1 x \sin(x) + \beta_0 \cos(x) + \beta_1 x \cos(x) \quad \begin{array}{l} \text{ni } y_1 \text{ ni } y_2 \\ \text{n'apparaissent!} \end{array} \quad \checkmark$$

$$y_p(x) = \alpha_0 \sin(x) + \alpha_1 x \sin(x) + \beta_0 \cos(x) + \beta_1 x \cos(x)$$

$$x \sin(x) = \left( \frac{3}{2} \alpha_0 - \beta_1 \right) \sin(x) + \frac{3}{2} \alpha_1 x \sin(x)$$

$$+ \left( \alpha_1 + \frac{3}{2} \beta_0 \right) \cos(x) + \frac{3}{2} \beta_1 x \cos(x)$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = 0, \alpha_1 = \frac{2}{3}, \beta_0 = -\frac{4}{9}, \beta_1 = 0$$

$$\Rightarrow y_{p,1}(x) = \frac{2}{3} x \sin(x) - \frac{4}{9} \cos(x)$$

$$\boxed{y_{p,2}} \quad q_2(x) = \cos(2x)$$

$$\rightarrow \alpha_0 \underbrace{\sin(2x)}_{y_1} + \beta_0 \underbrace{\cos(2x)}_{y_2} + \alpha_1 x \sin(2x) + \beta_1 x \cos(2x)$$

$$\rightarrow y_{p,2}(x) = \alpha_1 x \sin(2x) + \beta_1 x \cos(2x)$$

$$\cos(2x) = -2\beta_1 \sin(2x) + 2\alpha_1 \cos(2x) \quad \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}, \beta_1 = 0$$

$$\Rightarrow y_{p,2}(x) = \frac{1}{2} x \sin(2x)$$

La solution générale est  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$y(x) = \frac{2}{3} x \sin(x) - \frac{4}{9} \cos(x) + \frac{1}{2} x \sin(2x) + C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)$$

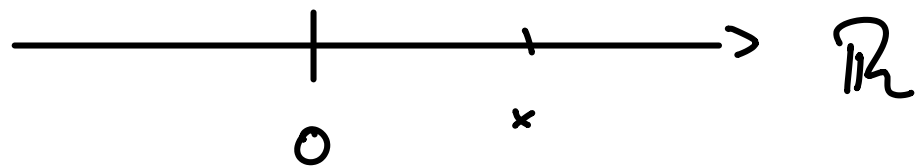
# Chapitre 2 L'espace $\mathbb{R}^n$

## § 2.1 Rappels et topologie

### Rappel 2.1 ( $\mathbb{R}^n$ et sa structure)

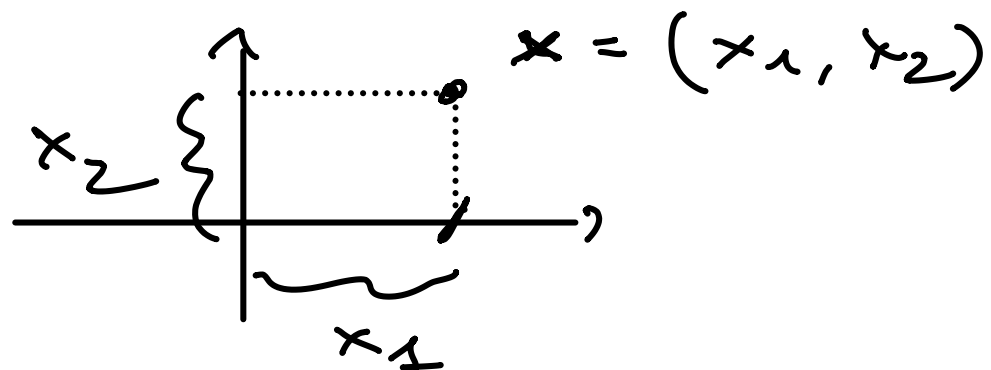
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'espace  $\mathbb{R}^n$  est  $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$

On écrit de manière générale pour  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$   
Si  $n=1$ ,  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$  est la droite réelle.



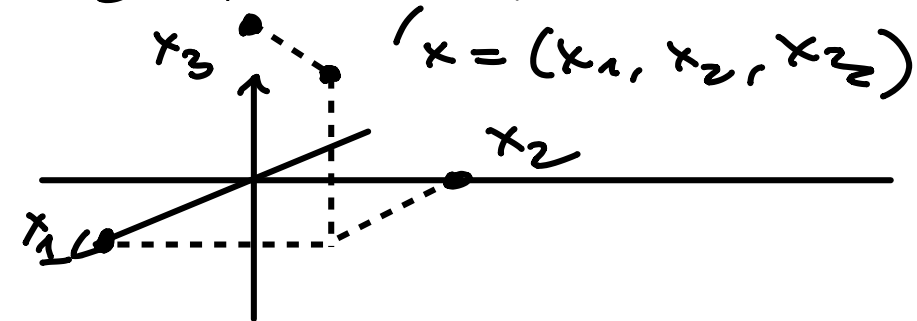
On écrit simplement  $x$  pour un élément de  $\mathbb{R}$  comme en analyse I

Si  $n=2$ ,  $\mathbb{R}^2$  est le plan



On écrit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  pour un élément générique de  $\mathbb{R}^2$ .

Si  $n=3$ ,  $\mathbb{R}^3$  est l'espace



On écrit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  pour un élément générique de  $\mathbb{R}^3$ .

Pour nous,  $x \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur ligne :

$x = (x_1, \dots, x_n)$ , si on a besoin de le voir comme un vecteur colonne, on utilise la transposée

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Structure de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel:

Addition:  $\bullet + \bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$(x, y) \longmapsto x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Mult. par scalaire

$$\bullet \cdot \bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Produit scalaire, norme & distance:

Produit scalaire euclidien:

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Norme euclidienne:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{aligned}$$

Distance euclidienne:

$$\begin{aligned} d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \end{aligned}$$

### Proposition 2.2

Propriétés du produit scalaire

- (i)  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, x \rangle \geq 0$  avec égalité seulement si  $x=0$
- (ii)  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- (iii)  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

Propriétés de la norme :